

# הכנה במתמטיקה 93053

## פרק 15 - קומבינטוריקה

### תוכן העניינים

1	1. בעיות בסיסיות בהסתברות
5	2. פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) מאורעות זרים ומכילים
14	3. כלל המכפלה
18	4. תמורה - סידור עצמים בשורה
21	5. תמורה עם עצמים זהים
23	6. סידור עצמים במעגל
26	7. דגימה סידורית ללא חזרה ועם חזרה
28	8. דגימה ללא סדר ולא חזרה
31	9. דגימה ללא סדר ועם חזרה
35	10. שאלות מסכימות

## הגדירות יסודיות:

**רקע:**

**ניסוי מקרי:** תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלה קובייה, מזג האויר בעוד שבועיים.

**מרחב מודגם:** כלל התוצאות האפשרות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלה קובייה:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , או: מזג האויר בעוד שבועיים: {נאה, שרבי, מושלג, גשם, מעונן, חלקית, אביך}.

**מאורע:** תת קבוצה מתוק מרחב מודגם. מסומן באותיות: A, B, C. בהטלה קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן:  $A = \{5, 6\}$ . המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן:  $B = \{2, 4, 6\}$ .

**גודל מרחב המודגם:** מספר התוצאות האפשרות למרחב המודגם. בהטלה קובייה למשל נקבע:  $|\Omega| = 6$ .

**גודל המאורע:** מספר התוצאות האפשרות במאורע עצמו. למשל, בהטלה הקובייה האירועים הקודמים יסומנו:  $|B| = 3$ ,  $|A| = 2$ .

**מאורע משלים:** מאורע המכיל את כל התוצאות האפשרות למרחב המודגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלה הקובייה:  $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ , .  $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$ .

**מרחב מודגם אחיד (סימטרי):** מרחב מודגם בו לכל התוצאות למרחב המודגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האויר בשבוע הבא.

**הסתברות במרחב מודגם אחיד:** במרחב מודגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

דוגמה : מה הסיכוי בהטלה קובייה לקבל לפחות 5 ?

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$$

דוגמה : מה הסיכוי בהטלה קובייה לקבל תוצאה זוגית ?

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$$

**הסתברות במרחב לא אחיד:** תחושב לפי השכיחות היחסית :

$$\frac{f}{n}$$

דוגמה :

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת :

הציון - x	מספר התלמידים – השכיחות – f
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

מה ההסתברות שתלמיד אקרי שנבחר בכיתה קיבל את הציון 8 ?

$$\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$$

מה ההסתברות שתלמיד אקרי שנבחר בכיתה יכשל ?

$$\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$$

**הסתברות למאורע משלים :** הסתברות לקבלת המשלים של המאורע ביחס למרחב המודגם :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

להיות מחושב לפי הסיכוי להכשל :

$$P(A) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$$

**שאלות:**

- 1)** מהאותיות E, F ו-G יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.  
 א. הרכיבו את כל המיללים האפשריות.  
 ב. רשמו את המקרים למאורע:  
 .i. במילה נמצאת האות E.  
 .ii. במילה האותיות שונות.  
 ג. רשמו את המקרים למאורע  $\bar{A}$ .
- 2)** מטילים זוג קוביות.  
 א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?  
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאיורים הבאים:  
 .i. סכום התוצאות 7.  
 .ii. מכפלת התוצאות 12.  
 ג. חשבו את הסיכויים לאיורים שהוגדרו בסעיף ב'.
- 3)** נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.  
 א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?  
 ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?  
 ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?
- 4)** להלן התפלגות מספר מקלט טלוויזיה עבור כל משפחה ביישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
10	4
22	3
18	2
28	1
22	0

- נבחרה משפחה באקראי מהיישוב.  
 א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?  
 ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?  
 ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

- 5)** להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר משפחות	מספר מכוניות
10	4
30	3
100	2
40	1
20	0

- נבחרה משפחה אקראית מן היישוב.  
 א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?  
 ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?  
 ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

- 6) נתיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.  
 א. רשמו את מרחיב המדגם של הניסוי. האם מרחיב המדגם הוא אחיד?  
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאיורים הבאים:  
 .i. התקבל פעם אחת עץ.  
 .ii. התקבל לפחות פלי אחד.  
 ג. מהו המאורע המשלים ל-D?  
 ד. חשבו את הסיכויים לאיורים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

### תשובות סופיות:

$$\text{א. } \Omega = \{EE, EF, EG, FE, FF, FG, GE, GF, GG\} \quad (1)$$

$$\text{ב. } A = \{EE, EF, EG, FE, GE\}, B = \{EF, EG, FE, FG, GE, GF\}$$

$$\text{ג. } \bar{A} = \{FF, FG, GF, GG\}$$

$$\text{א. } \Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (5,1) & (4,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{ב. } A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}, C = \{(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)\}$$

$$\text{ג. הסיכוי ל- } A : \frac{1}{9} \quad \text{הסיכוי ל- } B : \frac{1}{6}$$

$$\text{א. } 0.4 \quad \text{ב. } 0.4 \quad \text{ג. } 0.5 \quad (3)$$

$$\text{א. } 0.22 \quad \text{ב. } 0.78 \quad \text{ג. } 0.32 \quad (4)$$

$$\text{א. } 0.1 \quad \text{ב. } 0.2 \quad \text{ג. } 0.8 \quad (5)$$

$$\text{א. } \Omega = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP, EEE\} \quad (6)$$

$$\text{ב. } A = \{PPE, PEP, EPP\}, D = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP\}$$

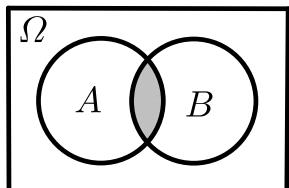
$$\text{ג. } \bar{D} = \{EEE\}$$

$$\text{ד. } \frac{1}{8}$$

## פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

**רעיון:**

**פעולות חיתוך:**

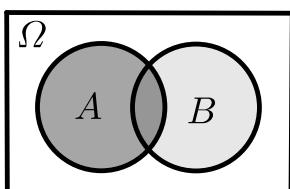


נותנת את המשותף בין המאורעות הנחככים.

חיתוך בין המאורע  $A$  למאורע  $B$  יסומן כך:  $A \cap B$ .  
מדובר בתוצאות שנמצאות ב- $A$  וגם ב- $B$ .

**דוגמה:**

.  $A = \{5, 6\}$  בהטלה קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן:  
.  $B = \{2, 4, 6\}$  האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן:  
.  $A \cap B = \{6\}$  החיתוך שביניהם הוא:



נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת:  $A \cup B$ .

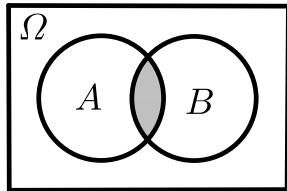
הפעולה נותנת את אשר נמצא ב- $A$  או  $B$ .  
כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

**דוגמה:**

.  $A = \{5, 6\}$  בהטלה קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן:  
.  $B = \{2, 4, 6\}$  האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן:  
.  $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$  האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית הן:

**דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):**  
סטודנטים ניגש בסMASTER לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ו מבחן בכלכלת. ההסתברות שלו לעبور את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעبور את המבחן בכלכלת הוא 0.8 וההסתברות לעبور את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלת היא 0.75.  
מה ההסתברות שלו לעبور את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?  
מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?  
מה ההסתברות לעبور לפחות מבחן אחד?

**נוסחת החיבור לשני מאורעות:**



ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע"י הקשר הבא :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**חוקי דה מורגן לשני מאורעות:**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

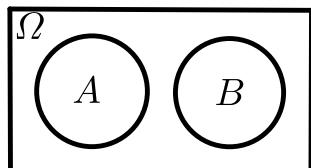
$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

**שיטת ריבוע הקסם:**

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	$\bar{A}$	$A$	
$B$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

**מאורעות זרים:**



מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף :  $A \cap B = \emptyset$ . כמובן, הם לא יכולים להתרחש בו זמינות.

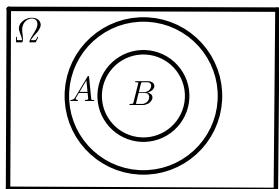
ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס :  $P(A \cap B) = 0$ .

ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**דוגמה :**

בהתלט קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן :  $A = \{5, 6\}$  והאפשרות לקבל 3 היא :  $B = \{3\}$ , ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כמובן :  $A \cap B = \emptyset$ .

**מאורעות מוכליים:**

נתונים שני מאורעות  $A$  ו-  $B$ , השונים מאפס.  
 נאמר שהמאורע  $B$  מוכל במאורע  $A$  אם כל איברי  
 המאורע  $B$  כלולים במאורע  $A$  ונרשום:  $B \subset A$ .  
 מאורע  $A$  מכיל את מאורע  $B$  כל התוצאות שנמצאות ב-  $B$   
 מוכלות בתחום מאורע  $A$ .

קשר זה מסומן באופן הבא :  $B \subset A$

$$A \cap B = B \quad P(A \cap B) = P(B)$$

$$A \cup B = A \quad P(A \cup B) = P(A)$$

למשל:  
 $A = \{2, 4, 6\}$   
 $B = \{2, 4\}$

**שאלות:**

- 1)** מהאותיות  $E$ ,  $F$  ו-  $G$  יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות. נגידר את המאורעות הבאים :
- A - במילה נמצאת האות  $E$ .
  - B - במילה אותיות שונות.
- א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך  $A$  עם  $B$ .
- ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של  $A$  עם  $B$ .
- 2)** תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחון בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגידר את המאורעות הבאים :
- A - עברו את המבחן בסטטיסטיקה.
  - B - עברו את המבחן בכלכלה.
- היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגידר את המאורעות הבאים וסמננו בדיאגרמת וון את השטח המתאים :
- א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
  - ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
  - ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
  - ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
  - ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
  - ו. התלמיד נכשל בכלכלה.
- 3)** נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגידר את  $A$  להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגידר את  $B$  להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
- א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים :
- $$A \cup B, A \cap B, \bar{B}, B, A$$
- ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.
- 4)** נסמן ב-  $\Omega$  את מרחב המדגמים וב-  $\emptyset$  קבוצה ריקה.  
 נתון כי  $A$  הינו מאורע בתוך מרחב המדגמים.  
 להלן מוגדרים מאורעות שפטرونום הוא  $\Omega$  או  $\emptyset$  או  $A$ .  
 קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו :
- $$A \cup \bar{A}, \bar{\emptyset}, A \cap \bar{A}, A \cup \Omega, A \cap \Omega, A \cup \emptyset, A \cap \emptyset, \bar{A}$$

5) הוגדרו המאורעות הבאים:

A - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים:

. א.  $A \cap B$

. ב.  $A \cup B$

. ג.  $\bar{A} \cap B$

. ד.  $\bar{A} \cup \bar{B}$

. ה.  $\bar{A} =$

6) נגדיר את המאורעות הבאים:

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים:

. א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

. ב. אדם דובר רק עברית.

. ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

. ד. אדם אינו דובר אנגלית.

. ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות במדויק (מהשפות הנ"ל).

7) שני מפלגות רצות לכינסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שני המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

. א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

. ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

. ג. מה ההסתברות שרק מפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8) במקום העבודה מסויים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמיים. 10% מהעובדים הין נשים אקדמיות.

. א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמיים?

. ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמיים?

. ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמיות?

9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות עלתה ביום מסוים.

חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים :

א. שתי המניות עלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא עלנה.

ג. שמניה A בלבד עלה.

10) מטילים זוג קופיות, אדומה ושחורה. נגידר את המאורעות הבאים :

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקופיות הוא 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקופיות היא 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11) עבר המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות :  $P(A)=0.6$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B})=0.1, P(B)=0.3$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

$$P(\bar{A} \cap B).$$

12) מטבח הווטל פעמיים. נגידר את המאורעות הבאים :

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר הkartiyim ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

14) נתון כי:  $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.25$ ,  $P(A \cup B) = 0.49$

.א. חשבו את הסיכוי ל-

.ב. האם  $A$  ו-  $B$  מאורעות זרים?

.ג. מה ההסתברות שرك  $A$  יקרה או שرك  $B$  יקרה?

.2.  $P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$  נתון ש:  $A$  ו-  $B$  מאורעות זרים. נתון ש:

מה הסיכוי למאורע  $A$  ומה ההסתברות למאורע  $B$ ?

15) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

.א.  $A \cap B = B \cap A$

.ב.  $\overline{A \cup B} = A \cap B$

.ג.  $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$

.ד.  $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

16) נתון ש-  $A$  ו-  $B$  מאורעות במרחב מדגם. נתון ש- $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.2$

.א. האם ניתן ש-  $P(A \cup B) = 0.4$ ?

.ב. האם ניתן ש-  $P(A \cup B) = 0.6$ ?

.ג. אם  $A$  ו-  $B$  זרים מה הסיכוי ?  $P(A \cup B)$

.ד. אם  $A$  מכיל את  $B$  מה הסיכוי ?  $P(A \cup B)$ ?

17) מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל-30% חשבו בבנק הפלטלים. ל-28% חשבו בבנק לאומי ול-15% חשבו בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבו בבנק לאומי ובבנק הפלטלים. ל-5% חשבו בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבו בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבו בנק בשלושת הבנקים יחד.

.א. מה אחוז האזרחים להם חשבו בבנק לאומי בלבד?

.ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו ייחסיק חשבו בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?

.ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבו בפועלים או במזרחי אבל לא בנק לאומי?

.ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבו בנק אחד בלבד?

.ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיקן חשבו בשני בנקים בלבד?

.ו. מה ההסתברות שלאזרח בגור אין חשבו בנק אף אחד מהבנקים הללו?

.ז. לאייה אחוז מהازרים יש חשבו בנק לפחות אחד מהבנקים הללו?

**19)** חברת מסויימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21. הנתונים שהתקבלו היו : 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראל", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראל, 8% מחזיקים כרטיס ישראל ועם אמריקן אקספרס ו- 7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הcredיטיסים הנ"ל.

א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?

ב. מה אחוז מחזיקי ישראל וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?

ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

$$\cdot P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

**20)** הוכיחו :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

**תשובות סופיות:**

.  $A \cap B = \{EG, EF, FE, GE\}$  א. (1)

.  $A \cup B = \{EG, EF, EE, FE, GE, EG, GF\}$  ב.

.  $\bar{B}$  ג. .  $\bar{A} \cap \bar{B}$  ה. .  $A \cup B$  ז. .  $A \cap B$  ג. .  $A \cap \bar{B}$  ב. .  $B \cap \bar{A}$  א. (2)

,  $\bar{B} = 5, 6, 7, 8, 9$ ,  $B = 0, 1, 2, 3, 4$ ,  $A = 0, 2, 4, 6, 8$  א. (3)

.  $A \cup B = 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3$ ,  $A \cap B = 0, 2, 4$

.  $P(A \cup B) = 0.7$ ,  $P(A \cap B) = 0.3$ ,  $P(\bar{B}) = 0.5$ ,  $P(B) = 0.5$ ,  $P(A) = 0.5$  ב.

,  $A \cup \Omega = \Omega$ ,  $A \cap \Omega = A$ ,  $A \cup \phi = A$ ,  $A \cap \phi = \phi$ ,  $\bar{\bar{A}} = A$  (4)

.  $A \cup \bar{A} = \Omega$ ,  $\bar{\phi} = \Omega$ ,  $A \cap \bar{A} = \phi$

ב.  $A \cup B$ : כל גובה אפשרי א. גובה בין 1.7 ל-1.8 (5)

.  $\bar{A} \cup \bar{B}$  ז. לכל היוטר 1.7 או לפחות 1.8 ג. גובה לכל היוטר  $\bar{A} = \bar{A} \cap B$

ה. גובה מעל 1.7  $A = \bar{\bar{A}}$

.  $A \cup B \cup C$  ג. .  $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$  ב. .  $A \cap B \cap C$  א. (6)

.  $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (B \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})$  ה. .  $\bar{C}$  ז.

.  $P(B \cap \bar{A}) = 0.16$  ג. .  $P(A \cap B) = 0.04$  ב. .  $P(A \cup B) = 0.24$  א. (7)

.  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 50\%$  ג. .  $P(A \cup B) = 50\%$  ב. .  $P(A \cap B) = 10\%$  א. (8)

.  $P(A \cup \bar{B}) = 0.3$  ג. .  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3$  ב. .  $P(A \cap B) = 0.2$  א. (9)

. לא. ג. כן. ב. כן. ד. לא. (10)

.  $P(\bar{A} \cap B) = 0.3$  ב. כן. א. כן. (11)

(12) הטענה הנכונה היא ג.

. 0.95 ב. 0.05 א. (13)

.  $P((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) = 0.43$  ג. .  $P(A \cap B) = 0.06$  א. (14)

.  $P(B) = \frac{1}{5}$ ,  $P(A) = \frac{2}{5}$  (15)

. נכוון. ג. לא נכון. ב. לא נכון. ד. נכון. (16)

.  $P(A \cup B) = 0.3$  ז. .  $P(A \cup B) = 0.5$  ג. .  $P(A) = 0.2$  ב. לא. (17)

. 0.41 ג. . 12% ה. . 46% ז. . 0.31 ג. . 0.05 ב. . 19% א. (18)

. 59% ז.

. 67% ג. . 10% ב. . 5% א. (19)

(20) שאלת הוכחה.

(21) נכון.

## קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

**רקע:**

**法则:**

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגמים.

אם לתחילה יש  $k$  שלבים :  $n_1$  אפשרויות לשלב הראשון,  $n_2$  אפשרויות לשלב השני...  $n_k$

אפשרויות לשלב  $k$  :

מספר האפשרויות לתחילה כולם יהיה :  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה ו גם מטבע? (הסביר בהקלטה)

$$n_1 = 6, n_2 = 2$$

$$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

למשל, כמה לווחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסביר בהקלטה)

$$n_1 = 26, n_2 = 10, n_3 = 10, n_4 = 10, n_5 = 10$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$$

**שאלות:**

**1)** חשבו את מספר האפשרויות לתהליכיים הבאים :

- א. הטלת קובייה פעמיים.
- ב. מספר תלת ספרתי.
- ג. בחירות בן ובת מכתה שיש בה שבעה בניים ועشر בנות.
- ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.

**2)** בمسעדה מציעים ארוחה עסקית.

- בארוחה עסקית יש לבוחר מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה.  
 האופציות למנה ראשונה הן : סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום.  
 האופציות למנה עיקרית הן : סטייק אנטריקוט, חזז עוף בגריל, לוזניה בשנית  
 ולוזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן : קפה, תה ולימונדה.
- א. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
  - ב. אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות :
    - נ. בארוחה סלט ירקות, לוזניה בשנית ולימונדה.
    - ו. בארוחה סלט, לוזניה ותה.

**3)** בוחרים באקראי מספר בין חמיש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות :

- א. המספר הוא זוגי.
- ב. במספר כל הספרות שוונות.
- ג. במספר כל הספרות זהות.
- ד. במספר לפחות שתי ספרות שוונות.
- ה. במספר לפחות שתי ספרות זהות.
- ו. המספר הוא פליינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאלו באות הזרה).

**4)** חישה אנשים אקראים נכנסו למלון בניין בן 8 קומות.

- חשבו את ההסתברויות הבאות :
- א. כולם ירו בקומה החמישית.
  - ב. כולם ירדו באותה קומה.
  - ג. כולם ירדו בקומה אחרת.
  - ד. ערן ודני ירדו בקומה הששית והיתר בשאר הקומות.

- 5) במפלגה חמישה עשר חברי כניסה. יש לבחור שלושה חברי כניסה לשלשה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם :
- חבר כניסה יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - חבר כניסה לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- 6) מטילים קובייה 4 פעמים.
- מה ההסתברות שכל התוצאות תהיה זהות?
  - מה ההסתברות שכל התוצאות תהיה שונות?
  - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהיה זהות?
  - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהיה שונות?
- 7) יש ליצור מילה בת חמיש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).
- מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות D, A ו-L?
  - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
  - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
  - מה ההסתברות שהמילה היא פליינדרום? (מילה אשר משמאלה לימין, ומימין לשמאלה נקראת אותו הדבר).
- 8) יוצרים קוד עם a ספרות (אפשר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות : (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).
- בקוד אין את הספרה 5.
  - בקוד מופיעה הספרה 3.
  - בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- 9) במשחק מזל יש למלא טופס בו 7 משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס המשחק המזל?

**תשובות סופיות:**

.90 .ד	.70 .ג	.900 .ב	.36 .א .(1)
	. $\frac{1}{9}$ .ב .ii	. $\frac{1}{36}$ .ב .i	.36 .א .(2)
.001 .ה .0.6976	.0.9999 .ד	.0.0001 .ג	.0.5 .א .(3)
	. $\frac{1 \cdot 1 \cdot 7^3}{8^5}$ .ט	.0.205 .ג	. $\frac{1}{8^5}$ .א .(4)
			.2730 .ב .(5)
	. $\frac{215}{216}$ .ט	. $\frac{13}{18}$ .ג	. $\frac{1}{216}$ .א .(6)
	. $\frac{1}{26^2}$ .ט	. $1 - \frac{1}{26^4}$ .ג	. $\frac{23^5}{26^5}$ .א .(7)
		.0.5 .ג	.0.9^a .א .(8)
		.1 - 0.9^a .ב	.2^n .(9)

## קומבינטוריקה – תמורה – סידור עצמים בשורה:

**רקע:**

**תמורה:**

מספר האפשרויות לסדר  $n$  עצמים שונים בשורה :  $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ .

הערה :  $0! = 1$ .

דוגמאות (פתרונות בהקלטה) :

- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות : ?a, b, c, d
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות : a, b, c, d, ?, כך שהאותיות יהייו ברצף?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות : a, b, c, d, ?, כך שהאותיות יופיעו בתור הרצף ?ba

**שאלות:**

- 1)** חשבו : בכמה אופנים
  - א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
  - ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?
  
- 2)** סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
  - א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
  - ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
  - ג. מה ההסתברות שני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצתה השני של המדף?
  
- 3)** בוחנים 5 בניים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים בעלי אותו ציון.
  - א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?
  - ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים אם מדרגים בניים ובנות בנפרד?
  
- 4)** מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.
  - א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?

שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.

  - ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?
  - ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?
  - ד. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצת אחר)?
  
- 5)** אדם יצר בungan שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הרץ את הפלייליסט באקראי.
  - א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים במקשאה אחת?
  - ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?
  - ג. מה ההסתברות שהשירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכן גם השירים בצרפתית)?

- 6) 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת כסאות 1-8 בקולנוע.
- מה ההסתברות שיויסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
  - מה ההסתברות שהבנות יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
  - מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

**תשובות סופיות:**

(1) א. 0.24      ב. 0.120

(2) א. 0.2      ב. 0.8

(3) א. 0.362880      ב. 0.2880

(4) א. 0.3628800      ב. 0.2

(5) א.  $\frac{1}{792}$       ב.  $\frac{1}{99}$       ג.  $\frac{1}{4620}$

(6) א. 0.75      ב. 0.014      ג.  $\frac{1}{14}$       ד.  $\frac{1}{35}$

## קומבינטוריקה – תמורה עם עצמים זהים:

**רקע:**

**תמורה עם חוזרות:**

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים, יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.

מספר האופנים לסדר  $n$  עצמים בשורה, ש- $n_1$  מהם זהים מסוג 1,  $n_2$  זהים מסוג 2

$$\text{ו- } n_r \text{ זהים מסוג } r : \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}.$$

**דוגמה (תשובה בהקלטה) :**

כמה מילים ניתן ליצור מכל האותיות הבאות : K, K, T, T, W, W ?

**שאלות:**

1) במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות :

--	--	--	--	--

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

2) בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות: ב, ע, ע, ב, ג?

3) בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתी נורות כחולות. כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?

4) נרצה ליצור מספר מכל הספרות הבאות: 6, 6, 2, 2, 2, 1. כמה מספרים כאלה אפשר ליצור?

5) במשחק בול פגיעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10. המשתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו. מה ההסתברות שבניחס אחד יהיה בול פגעה?

6) כמה אותות שונים, שכל אחד מורכב מ-10 דגלים שונים, ניתן ליצור, אם 4 דגלים הם לבנים, 3 כחולים, 2 אדומים ואחד שחור. דגלים שווים צבע זהם זה לזה לחלוtiny.

**תשובות סופיות:**

.10 (1)

.60 (2)

.90 (3)

.20 (4)

. $\frac{1}{210}$  (5)

.12600 (6)

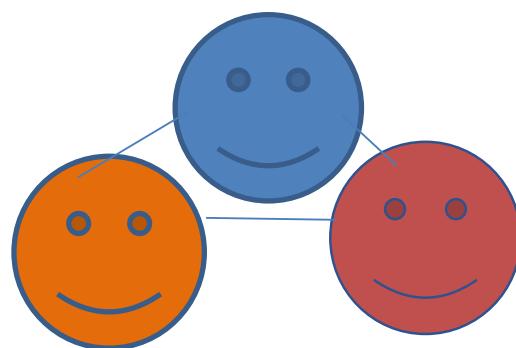
## קומבינטוריקה – סידור עצמים במעגל:

רעיון:

מספר האפשרויות לסדר  $n$  עצמים שונים במעגל בו אין מקומות מסוימים הוא:  $(n-1)!$ .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

דנה, רמה ושדה רוצות ליצור מעגל ריקוד.  
בכמה דרכים שונות הן יכולות להחזיר את הידים, כדי ליצור את המעגל?



**שאלות:**

- 1)** מעצב פנים יצר ללקחותיו מניפת צבעים המוצגת בمعالג.  
 במניפה 12 צבעים שונים מתוכם 3 בגוני אפור, 3 בגוני לבן, 3 בגוני ירוק  
 ו-3 בגוני צהוב. כמה מניפות שונות ניתן ליצור כאשר:  
 א. גוני האפור צמודים זה לזה.  
 ב. צבעים באותו גוון צמודים זה לזה.



**2)** דני יוצר שרשרת חרוזים הבנوية מעשרה חרוזים  
 בצבעים שונים.

הוא משליל את עשרת החרוזים באקראי.  
 חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. הסידור יהיה בדיקן כמוראה בציור.

ב. החרוז הלבן והכתום יהיו בסמוך זה לזה.

- 3)** אבא הכין עוגת יומולדת עגולה. הוא סידר 7 נרות כמוראה בשרטוטו,  
 הנרות זחים ונבדלים זה מזה בצבע: 2 כחולים זחים, 2 אדומים זחים,  
 2 צהובים זחים ו-1 כתום. סידור הנרות נעשה באקראי.  
 חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. הנרות הצהובים סמוכים זה לזה.

ב. נרות באותו צבע סמוכים זה לזה.



**4)** ח' בנים ו-ח' בנות הסתדרו בمعالג באקראי.

א. מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה  
 בלי להתפצל?

ב. מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה  
 בלי להתפצל וגם כל הבנות יסתדרו זו לצד  
 זו בלי להתפצל?

ג. מה הסיכוי שהסידור יהיה שמיין ומשמאלי  
 לכל בן תהיה בת?

**תשובות סופיות:**

$$\text{.7776} \quad \text{ב.} \quad \text{.2177280} \quad \text{א.} \quad \text{(1)}$$

$$\cdot \frac{2}{9} \quad \text{ב.} \quad \cdot \frac{1}{9!} \quad \text{א.} \quad \text{(2)}$$

$$\cdot \frac{1}{15} \quad \text{ב.} \quad \cdot \frac{1}{3} \quad \text{א.} \quad \text{(3)}$$

$$\cdot \frac{(n-1)!(n!)}{(2n-1)!} \quad \lambda \quad \cdot \frac{(n!)^2}{(2n-1)!} \quad \text{ב.} \quad \cdot \frac{(n!)^2}{(2n-1)!} \quad \text{א.} \quad \text{(4)}$$

## קומבינטוריקה – דוגמה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

**רעיון:**

**مثال סידור בדוגמה עם החזרה:**

מספר האפשרויות בדגם  $k$  עצמים מתוך  $n$  עצמים שונים כאשר הדגם היא עם החזרה והדוגמא סדור הו  $n^k$ .

**דוגמה:**

בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה ליאציג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדיים שונים ניתן להרכיב?  $n = 10, k = 3, 10^3 = 1,000$ .

**مثال סידור ללא החזרה:**

מספר האפשרויות בדגם  $k$  עצמים שונים מתוך  $n$  עצמים שונים ( $n \geq k$ ) כאשר המדוגם סדור ואין החזרה של עצמים נדונים הינו:

$$\cdot (n)_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**דוגמה:**

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 ליאציג ועד בו תפקידים שונים.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד:  $\frac{10!}{7!} = 720 = 8 \cdot 9 \cdot 10$ .

**שאלות:**

- 1)** במלגה 20 חברים כניסה, מעוניינים לבחור שלושה חברים כניסה כניסה לשלשה תפקדים שונים.
- חבר כניסה יכול למלא יותר מתקיך אחד. כמה קומבינציות ישן לחלוקת התפקידים?
  - חבר כניסה לא יכול למלא יותר מתקיך אחד. כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?
- 2)** במשחק מזל יש 4 משבצות ממושפרות מ-D-A (A עד D). בכל משבצת יש למלא סירה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכון את כל הספרות בכל המשבצות בהתאם.
- מה ההסתברות לזכות המשחק?
  - מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
  - מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?
- 3)** קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?
- 4)** שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעה היא שבסינגפור ישם 5 מלונות הילטון.
- מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
  - מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?
- 5)** בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם :
- בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתקיך אחד.
  - בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתקיך אחד.

**תשובות סופיות:**

- |     |    |         |        |                  |
|-----|----|---------|--------|------------------|
| (1) | א. | .6840   | ב.     | .8000            |
| (2) | ג. | .0.3439 | ב.     | .0.6561          |
| (3) |    |         | א.     | .0.0001          |
| (4) |    |         | .0.476 |                  |
| (5) |    |         | ב.     | .0.04            |
|     |    |         | א.     | .40 <sup>5</sup> |
|     |    |         | ב.     | .78,960,960      |

## קומבינטוריקה – דוגמה ללא סדר ולא החזרה:

**רעיון:**

**مثال לא סדר בדוגמה ללא החזרה:**

מספר האפשרויות לדגום  $k$  עצמים שונים מתוך  $n$  עצמים שונים כאשר אין

$$\cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{\binom{n}{k}}{k!}$$

משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה :

**דוגמה :**

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים :

$$\cdot \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

**הערות :**

$$\cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1)$$

$$\cdot \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad (2)$$

$$\cdot \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad (3)$$

**שאלות:**

- 1)** בכיתה 15 בנות ו-10 בניים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הклассה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם :
- אין שום הגבלה לבחירה.
  - מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בניים ירכיבו את המשלחת.
  - לא יהיו בניים במשלחת.
- 2)** סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפני רשימה של 10 קורסים לבחירה : 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.
- כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
  - כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם מדעי הרוח?
  - כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא מדעי הרוח?
  - כמה בחירות יש לו אם 2 מדעי הרוח, 2 מדעי החברה ו-1 מתמטיקה?
- 3)** בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות. יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
- מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
  - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
  - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?
- 4)** במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
- מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחד זוגי?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?
- 5)** בחפיסת קלפים ישנים 52 קלפים : 13 בצבע שחור בצדota עלה, 13 בצדota אדום בצדota לב, 13 בצדota אדום בצדota יהלום ו-13 בצדota שחור בצדota תלtan. מכל צורה (מתוך 4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם ; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקובסת קלפים רגילה ללא גווקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (לא החזקה).
- מה ההסתברות שעוזד קיבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
  - מה ההסתברות שאחד השחקנים קיבל את הקלו' אס-לב?
  - מה ההסתברות שעוזן קיבל קלפים שחורים בלבד ועוד קיבל שני קלפים שחורים בדיקון?
  - מה ההסתברות שעוזן קיבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס או נסיך)?

6) במכלה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכלה. יוצרים וועד באופן אקראי.

חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".

ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.

ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

$$7) \text{ הוכחו כי: } \cdot \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

8)  $n$  בניים ו- $a_2$  בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.

א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בניים ובנות?

ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בניים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

### תשובות סופיות:

$$\text{1) } \text{א. } 0.53130 \quad \text{ב. } 0.20475 \quad \text{ג. } 0.3003$$

$$\text{2) } \text{א. } 0.252 \quad \text{ב. } 0.100 \quad \text{ג. } 0.100$$

$$\text{3) } \text{א. } 0.01117 \quad \text{ב. } 0.01445 \quad \text{ג. } 0.9819$$

$$\text{4) } \text{א. } 0.02 \quad \text{ב. } 0.0187 \quad \text{ג. } 0.00246$$

$$\text{5) } \text{א. } 0.0 \quad \text{ב. } 0.01923 \quad \text{ג. } 0.009$$

$$\text{6) } \text{א. } 6.45 \cdot 10^{-5} \quad \text{ב. } 2.58 \cdot 10^{-4} \quad \text{ג. } 0.3225$$

7) שאלת הוכחה.

$$\text{8) } \text{א. } \binom{2n}{n}^2 \quad \text{ב. } \sum_{i=1}^n \binom{2n}{i}^2$$

## קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר ועם החזרה:

**רעיון:**

מספר האפשרויות לבחור  $k$  עצמים (לא בהכרח שונים) מתוך  $n$  עצמים שונים, ללא חשיבות לסדר העצמים הנדונים, ועם יכול להיבחר יותר מפעם אחת :

$$\cdot \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

**דוגמה :**

בכמה דרכים שונות ניתן לחלק 4 כדורים זהים לשלווה תאים שבכל תא יש מקום ליותר מכדור אחד? (פתרון והסביר הרעיון בהקלטה)

**סיכום כללי של המცבים האפשריים לדגימה:**

מספר האפשרויות לבחירת $k$ עצמים מתוך אוכלוסייה של $n$ עצמים שונים			
ללא התחשבות בסדר הבחירה	עם התחשבות בסדר הבחירה	ביצוע הדגימה	
$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$	$n^k$	עם החזרה	
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	ללא החזרה	

**שאלות:**

- 1) בכמה דרכים יש להכניס 8 כדורים זהים לחמשת תאים כאשר תא יכול להכיל יותר מכדור אחד?
  
- 2) בכמה אופנים ניתן להכניס 5 מחברות זהות ל-3 תיקים שונים?
  
- 3) בכמה אופנים ניתן להכניס 8 כדורים לתוך 3 תאים שונים כאשר:
  - א. ה כדורים זהים.
  - ב. ה כדורים שונים זה מזה.
  
- 4) בכמה דרכים יש לסדר 10 משחקים ב-4 מגירות כאשר:
  - א. המשחקים שונים זה מה זה.
  - ב. במשחקים זהים זה זה.
  
- 5) מהו מספר הפתרונות שלמים האי שליליים לשווואה הבאה:  $X_1 + X_2 = 3$ .
  
- 6) מהו מספר הפתרונות שלמים האי-שליליים לשווואה הבאה:  
 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$ .
  
- 7) במכירה פומבית הוצגו 4 פרוטי זהב זהים לחנותן. על קניית היצירות התרero 3 אספנים. אספן יכול היה לרכוש יותר ממפרוט אחד. בהנחה וכל הפמות נמכרו, כמה אפשרויות מכירה לאספנים השונים ישן?
  
- 8) נתונות האותיות: A, B, C ו-D. נרצה לבחור שתי אותיות מתוך קבוצת האותיות הללו כאשר מותר לבחור אותה יותר יותר מפעם אחת אבל אין חשיבות לסדר האותיות שנבחרו. כמה דרכים ישן לבחירה?
  
- 9) במשחק הלוטו החדש יש לבחור ארבעה מספרים מתוך המספרים 1-20. אין חשיבות לסדר הפנימי של המספרים, אלא רק לגלוות אילו מספרים עלו בגורל. מה הסיכוי לגלוות את המספרים שעלו בגורל אם:
  - א. אסור לבחור את אותו מספר יותר מפעם אחת.
  - ב. מותר לחזור על אותו מספר יותר מפעם אחת.

10) ישנו 5 כדורים להכenis ל-6 תאים.

חשבו את מספר האפשרויות להכנסת כדורים כאשר :

- א. ה כדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מ cwdor אחד.
- ב. ה כדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מ cwdor אחד.
- ג. ה כדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מ cwdor אחד.
- ד. ה כדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מ cwdor אחד.

11) ישנו  $k$  כדורים להכenis ל- $n$  תאים ( $k > n$ ).

חשבו את מספר האפשרויות להכנסת כדורים כאשר :

- א. ה כדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מ cwdor אחד.
- ב. ה כדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מ cwdor אחד.
- ג. ה כדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מ cwdor אחד.
- ד. ה כדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מ cwdor אחד.

**תשובות סופיות:**

$$\text{.495 (1)}$$

$$\text{.21 (2)}$$

$$\text{.6561 ב. .45 א. (3)}$$

$$\text{.286 ב. } 4^{10} \text{ א. (4)}$$

$$\text{.4 (5)}$$

$$\text{.1771 (6)}$$

$$\text{.15 (7)}$$

$$\text{.10 (8)}$$

$$\cdot \frac{1}{8855} \text{ ב. } \cdot \frac{1}{4845} \text{ א. (9)}$$

$$\text{.6.7. } \cdot .720. \cdot .252. \quad \text{ב. } 7776 \text{ א. (10)}$$

$$\cdot (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \lambda \quad \cdot \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} \cdot \text{ב. } \cdot n^k \text{ א. (11)}$$

$$\cdot \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \tau$$

## קומבינטוריקה – שאלות מסכמתות:

### שאלות:

- (1) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה.  
בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:  
 א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מ תפקיד אחד.  
 ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מ תפקיד אחד.  
 ג. אין תפקידים שונים בוועד.
  
- (2) במשרדים 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים לשלחת לחו"ל.  
בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?  
 א. בשלחת ארבע שימושות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר משימוש אחת.  
 ב. כמו בסעיף א' רק הפעם העובד לא יכול למלא יותר משימוש אחת.  
 ג. מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים לשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.
  
- (3) מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).  
 א. כמה קודים שונים ניתן להרכיב?  
 ב. כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחילה בספרה ונגמר בספרה?  
 ג. כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?  
 ד. בכמה קודים הספרות לא מופיעות בראצף?
  
- (4) בארוןית 4 מגירות. לצד התבkas על ידי אמו לסדר 6 משחקים בארוןית.  
הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות.  
כל מגירה יכולה להכיל את כל המשחקים יחד.  
 א. מה ההסתברות שהילד יכנס את כל המשחקים למגירה העליונה?  
 ב. מה ההסתברות שהילד יכנס את כל המשחקים למגירה העליונה?  
 ג. מה ההסתברות ש"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.  
 ד. מה ההסתברות ש"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

- 5)** בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות : "הירוקים", "קדימה", "העובדיה" ו"הlijcod". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
- מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיקן 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל 1 בלבד?
  - מה ההסתברות שמלגנת "הירוקים" תקבל 2 קולות, מלגנת "העובדיה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הlijcod" תקבל 2 קולות?
- 6)** 5 חברים נפגשו ורצו לראות סרט. לרשותם ספרייה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
- מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
  - מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמייני"?
  - מה ההסתברות של לפחות אחד יבחר סרט אחר?
  - מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
  - מה ההסתברות שיויסי וערן יختارו את "הנוסע השמייני" וכל השאר סרטים אחרים?
  - מה ההסתברות שהנוסע השמייני לא יבחר על ידי אף אחד מהחברים?
  - לקחו את 8 הסרטים וייצרו מהם רשימה. נתון שרשימה 3 סרטים אימה, מה ההסתברות שרשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטים האימה בראצף?
- 7)** בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה : אחת בת 4 אנשים והשנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול לבחור רק לוועדה אחת. חשבו את מס' הדרכים השונות ליצור הוועדות הללו כאשר :
- אין בוועדות תפקידים.
  - בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
  - בכל וועדה כל התפקידים שונים.
- 8)** 4 גברים ו-3 נשים מתישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההשבה:
- ללא הגבלה.
  - כל הגברים ישבו זה לצד זה וגם כל הנשים תשכנה זו לצד זו.
  - שני גברים בקצת אחד ושני הגברים האחרים בקצת שני.
- 9)** בהגירה ישנים 10 מספרים מ-1 עד 10. נבחרו באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

**10)** 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות.

כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.

א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?

ב. מה ההסתברות שבDIRECT 3 ירדו בתחנה החמישית?

ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?

ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5, ופחות אחד בכל אחת

מהתחנות הללו?

**11)** ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסעה ו4 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסעה.

4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.

א. בכמה דרכים שונים ניתן להתיישב?

ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסעה?

ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?

ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון?  
(בכל שורה יש חלון).

ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסעה מנוגד?

ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.

ז. מה ההסתברות שכל הגברים יישטו עם כיוון הנסעה וכל הנשים תשכנה נגד כיוון הנסעה?

ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?



**12)** סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (9-0) ואותיות ה-ABC (26 אותיות). כל TWO יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.

א. כמה סיסמאות שונות יש?

ב. כמה סיסמאות שונות יש לבדוק כל התווים שונים?

ג. כמה סיסמאות שונות יש לבדוק לפחות אחת ולפחות אחת?

**13)** מתוך קבוצה בת  $n$  אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות  $n$ .

א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.

ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מ תפקיד אחד.

ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מ תפקיד אחד.

**14)** שני אנשים מטילים כל אחד מטבע  $n$  פעמים. בטאו באמצעות  $n$  את הסיכוי שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

- 15)** יוצרים קוד עם  $a$  ספרות (אפשר לחזור על אותה ספרה בקוד).  
 חשבו את ההסתברויות הבאות (בטאו את תשובהיכם באמצעות  $a$ ):
- בקוד אין את הספרה 5.
  - בקוד מופיע הספרה 3.
  - בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- 16)** זוג קוביות הוטלו מספר פעמיים. כמה פעמים יש להטיל את זוג הקוביות בצד  
 שהסתברות של לפחות 0.5 תתקבל לפחות הטלת אחת (של הזוג) עם סכום  
 תוצאות 12?
- 17)** בוחרים באופן מקרי מספר בין 6 ספרות.
- מה הסיכוי שהספרה 5 תופיע בבדיקה פעם אחת במספר?
  - מה הסיכוי שהספרה 4 תופיע לפחות פעם אחת וגם הספרה 0 תופיע  
 לפחות פעם אחת במספר?
- 18)** במשרד של דנה 5 תיקיות אותן היא מסדרת באקראי בטור. 3 תיקיות הן  
 אדומות ו-2 תיקיות הן כחולות. דנה רשמה שני הפטקים ושם כל פטק במקום  
 אקראי בין התיקיות (לכל פטק יש 4 אפשרויות למקום).
- מה הסיכוי שני הפטקים יהיו באותה מקום?
  - מה הסיכוי שבין שני הפטקים יש שתי תיקיות אדומות ואין תיקיות  
 כחולות?
  - מה הסיכוי שבין שני הפטקים יש שתי תיקיות ואחת מהן כחולה?
  - מה הסיכוי שבין שני הפטקים יש שתי תיקיות ואחת מהן כחולה?
- 19)** לירון 6 פעמים אותן הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים שונים.  
 לכל עט הוא בוחר באופן מקרי קלמר.
- מה הסיכוי שיש בבדיקה 2 קלמרים שבעל קלמר בבדיקה 2 פעמים?
  - מה הסיכוי שיש בבדיקה קלמר אחד שבו בבדיקה 2 פעמים?
  - מה הסיכוי שיש בבדיקה 3 קלמרים שבעל אחד בבדיקה 2 פעמים?
- 20)** מסדרים  $n$  כדורים שונים ב- $n$  תאים שונים (תא יכול להכיל יותר מכדור  
 אחד). מה הסיכוי שבתא  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) יהיו בבדיקה  $k$  כדורים?
- 21)** בתחרות ריצה עלו לגמר 6 מתמודדים. רק בשלושת המקומות הראשונים  
 זוכים במדליות. נניח שככל המתמודדים מסיימים את התחרות.
- כמה אפשרויות יש לסיים את התחרות?
  - כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 קיבל מדליה?
  - כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 קיבל מדליה או שמתמודד  
 מספר 2 קיבל מדליה זהב?

- 22) מטילים קובייה הוגנת  $k$  פעמים.
- מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה שהתקבלה היא  $j$ ?
  - מה הסיכוי שהתוצאה הכי קטנה שהתקבלה היא  $i$ ?
  - עבור  $j \leq i$ , מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה היא  $j$  וגם התוצאה הכי קטנה היא  $i$ ?

**תשובות סופיות:**

.658008 .ג	.78,960,960 .ב	.102,400,000 .א	<b>(1)</b>
.27,405 .ג	.657,720 .ב	.810,000 .א	<b>(2)</b>
.8,424,000 .ד	.5,616,000 .ג	.14,040,000 .א	<b>(3)</b>
.0.75000 .ד	.0.05933 .ג	.0.00024 .א	<b>(4)</b>
.0.02197 .ד	.0.02929 .ג	.0.00098 .א	<b>(5)</b>
0.795 .ד	.0.205 .ג	. $\frac{1}{32,768}$ .ב	. $\frac{1}{4096}$ .א <b>(6)</b>
	.0.1071 .ג	.0.5129 .ו	.0.0105 .ה
	.604,800 .ג	.50,400 .ב	.4,200 .א <b>(7)</b>
	.2,880 .ג	2,880 .ב	.604,800 .א <b>(8)</b>
			.0.238 <b>(9)</b>
. $\frac{62}{10^6}$ .ד	.0.059 .ג	.0.014 .ב	.0.1512 .א <b>(10)</b>
.0.0357 .ד	.0.2142 .ג	.0.1071 .ב	.40,320 .א <b>(11)</b>
.0.0095 .ח	.0.0143 .ג	.0.1429 .ו	.0.5714 .ה
	.48,484,800 .ג	.45,239,040 .ב	.60,466,176 .א <b>(12)</b>
	. $n^3$ .ג	. $n \cdot (n-1)(n-2)$ .ב	. $\frac{n!}{3!(n-3)}$ .א <b>(13)</b>
			. $\frac{1}{4^n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$ <b>(14)</b>
	.0.5 <sup>a</sup> .ג	.1-0.9 <sup>a</sup> .ב	.0.9 <sup>a</sup> .א <b>(15)</b>
			<b>(16)</b> לפחות 25 פעמים.
		.0.1759 .ב	.0.35721 .א <b>(17)</b>
.0.15 .ד	.0.375 .ג	.0.075 .ב	.0.75 .א <b>(18)</b>
	. $\frac{90}{729}$ .ג	. $\frac{450}{729}$ .ב	.0 .א <b>(19)</b>
			. $\frac{\binom{n}{k} (n-1)^{n-k}}{n^n}$ <b>(20)</b>
	.432 .ג	360 .ב	.720 .א <b>(21)</b>

$$\cdot \frac{(7-i)^k - (6-i)^k}{6^k} . \beth \quad \cdot \frac{j^k - (j-1)^k}{6^k} . \aleph \quad (22)$$
$$\cdot \frac{(j-i+1)^k - 2 \cdot (j-i)^k + (j-i-1)^k}{6^k} . \daleth$$